Von Neumann, John

La fundamentación formalista de la matemática

La fundamentación formalista de la matemática*

I.

La pregunta acerca de las razones de la confiabilidad absoluta de la matemática clásica, reconocida generalmente, se ha renovado en las últimas décadas a través de las investigaciones críticas sobre los fundamentos, especialmente a partir del sistema "intuicionista" de Brouwer. Resulta digno de atención que esta pregunta, en sí y por sí misma filosófica y epistemológica, se encuentra en condiciones de ser tratada como una pregunta lógico-matemática. Tres importantes avances en el campo de la lógica matemática han provocado que en la actualidad, en las indagaciones sobre los fundamentos, se estén investigando problemas inequívocamente matemáticos, y no cuestiones de gusto, a saber: la formulación de los defectos en la matemática clásica debida a Brouwer, la descripción exacta y exhaustiva de sus métodos (los buenos y los malos) realizada por Russell, y las contribuciones de Hilbert a la investigación matemática-combinatoria de estos métodos y sus relaciones.

Puesto que los otros artículos se han ocupado exhaustivamente tanto del domino –delimitado por Brouwer– de las definiciones y métodos de demostración "intuicionistas" o "finitarios", absolutamente confiables y que no necesitan justificación, como de la caracterización formal de la naturaleza de la matemática clásica, realizada por Russell y continuada por su escuela, no necesitamos abocarnos a estos temas más detenidamente; sin embargo, es evidente que su conocimiento es una condición indispensable para comprender la conveniencia, la tendencia y el *modus procedendi* de la teoría de la demostración de Hilbert. Nos volcaremos entonces de inmediato a la teoría de la demostración.

Su idea fundamental es la siguiente: aun si las afirmaciones con contenido de la matemática clásica resultaran no ser confiables, es cierto sin embargo que ésta involucra un procedimiento contenido en sí mismo, que procede de acuerdo con reglas seguras conocidas por todos los matemáticos, y que consiste en construir sucesivamente ciertas combinaciones de símbolos primitivos que pueden ser calificadas como "correctas" o "demostradas". Más aún, este procedimiento de construcción es ciertamente "finitario" y directamente constructivo. Para apreciar con claridad la diferencia fundamental que existe entre el tratamiento en ocasiones no constructivo del "contenido" de la matemática (los números reales y cosas similares) y el encadenamiento siempre constructivo de sus pasos demostrativos, podemos considerar el siguiente ejemplo: supongamos que existe una demostración matemática clásica de la existencia de un número real x con una cierta propiedad $E(x)$, ciertamente complicada y profunda. Entonces puede llegar a ocurrir que a partir de esta demostración de ningún modo sea posible obtener un procedimiento para construir un x con la propiedad $E(x)$ (en un momento daremos un ejemplo de esta demostración); en cambio, en el caso de que esta demostración viole en algún lugar las convenciones de la inferencia matemática, es decir, cuando exista en ella un error, naturalmente sería posible encontrar con seguridad este error por medio de un procedimiento de prueba finitario. En otras palabras, aunque no siempre es posible controlar finitariamente (esto es, en general) la aseveración de un teorema matemático clásico, sí es posible controlar el camino formal a través del cual se llegó a dicha aseveración. Si queremos revisar la matemática clásica en relación a su confiabilidad, lo que en principio sólo es posible a través de su reducción al sistema finitario confiable *a priori* (i.e., el sistema de Brouwer), entonces no debemos investigar sus afirmaciones, sino sus métodos de demostración. Debemos concebir la matemática clásica como un juego combinatorio con los símbolos

---

* Traducción de von Neumann, J. (1931), "Die formalistische Grundlegung der Mathematik", *Erkenntnis* 2: 116-121.

Metatheoria 10(2)(2020): 79-82. ISSN 1853-2322. eISSN 1853-2330.

primitivos y establecer, de un modo combinatorio-finitario, a qué combinación de símbolos primitivos o "demostraciones" pueden conducir estos métodos de construcción.

Retomemos entonces el ejemplo de una prueba de existencia no constructiva. Sea *f(x)* una función lineal que es lineal desde 0 a $\left(\frac{1}{3}\right)$, desde $\left(\frac{1}{3}\right)$ a $\left(\frac{2}{3}\right)$, desde $\left(\frac{2}{3}\right)$ a 1, y así su sucesivamente. Sea además $f(0) = -1$, $f\left(\frac{1}{3}\right) = -\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\epsilon_{2n}}{2^n}$, $f\left(\frac{2}{3}\right) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\epsilon_{2n-1}}{2^n}$, $f(0) = 1$.

Además ϵ_n se define así: cuando $2n$ es la suma de dos números primos, entonces $\epsilon_n = 0$ de lo contrario, $\epsilon_n = 1$. Evidentemente *f(x)* es continua y computable efectivamente con una exactitud arbitraria en todo punto *x*. Dado que $f(0) < 0$, $f(1) > 1$ existe un *x*, en $0 \leq x \leq 1$, tal que $f(x)=0$. (Incluso notamos que $\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}$.). Sin embargo, la tarea de encontrar una raíz con una exactitud mayor a $\pm\frac{1}{6}$ tropezaría con dificultades insuperables, dado el estado actual de la matemática: ello implicaría pues que podríamos predecir con exactitud la existencia de una raíz $< \frac{2}{3}$ o $> \frac{1}{3}$, según si su valor aproximado sea $\leq \frac{1}{2}$ o $\geq \frac{1}{2}$, respectivamente. El primer caso excluye que $f\left(\frac{1}{3}\right) < 0$ y que $f\left(\frac{2}{3}\right) = 0$; el segundo que $f\left(\frac{1}{3}\right) = 0$ y que $f\left(\frac{2}{3}\right) > 0$. Es decir, en el primer caso el valor de ϵ_n se anula para todos los *n* impares, pero no así para los *n* pares; en el segundo caso, lo inverso. En otras palabras, hubiésemos probado que la famosa conjetura de Goldbach (según la cual $2n$ es siempre la suma de dos números primos), en lugar de ser válida en general, debe ser rechazada para los *n* impares, en el primer caso, y para los *n* pares, en el segundo. Pero ningún matemático está en condiciones de proporcionar una demostración ni para el primer caso ni para el segundo, ya que nadie puede encontrar una solución de *f*(0) más exacta que con un error de $\frac{1}{6}$. (Con un error de $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{2}$ es un valor aproximado de la raíz, puesto que se encuentra entre $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{3}$, esto es, entre $\frac{1}{2} - \frac{1}{6}$ y $\frac{1}{2} + \frac{1}{6}$.)

II.

Por consiguiente, las tareas que debe resolver la teoría de la demostración de Hilbert son las siguientes:

1. Enumerar todos los símbolos que son utilizados en la matemática y la lógica. Entre estos símbolos, que deben ser llamados "símbolos primitivos", se encuentran entre otros los símbolos –, → (que representan la "negación" y la "implicación").
2. Caracterizar de manera inequívoca todas las combinaciones de estos símbolos, que representan enunciados identificados como "con sentido" en la matemática clásica. A estas combinaciones se las debe denominar "fórmulas". (Nótese que se habla aquí de "con sentido", y no meramente de "correctos". $1+1 = 2$ y $1+1 = 1$ tienen ambos sentido, independientemente de que el primero es correcto, mientras que el segundo no lo es. Sin sentido es, por ejemplo, $1+\rightarrow = 1$, o $++1 = -$.)
3. Se debe especificar un procedimiento de construcción que autoriza la producción sucesiva de todas las fórmulas que se corresponden con las afirmaciones "demostradas" de la matemática clásica. Por este motivo, este procedimiento se llama "demostrar".
4. Se debe mostrar (de un modo finitario-combinatorio) que aquellas fórmulas que corresponden a afirmaciones de la matemática clásica controlables desde un punto de vista finito (comprobables aritméticamente) podrán ser demostradas (i.e., construidas) según el procedimiento explicado en 3, si y sólo si el "procedimiento" efectivo recién mencionado de las afirmaciones matemáticas correspondientes da como resultado que son correctas.

En el caso de que las tareas 1.-4. hayan sido garantizadas, se habrá establecido de este modo la confiabilidad absoluta de la matemática clásica en el siguiente sentido: como un método simplificado para calcular expresiones aritméticas, cuyo cálculo elemental sería muy complicado. Sin embargo,

puesto que la matemática clásica es utilizada en la práctica de esta manera, se habrá explicado así suficientemente el hecho empírico de su confiabilidad.

Ahora bien, debemos señalar que gracias a los trabajos de Russell y su escuela, en la actualidad las tareas 1.-3. no ofrecen más mayores dificultades. La formalización de la matemática y la lógica sugerida por medio de 1.-3. puede ser llevada a cabo de diversas maneras. El verdadero problema es entonces 4.

En cuanto a 4. debemos ahora observar lo siguiente: si el 'cálculo efectivo' de una fórmula numérica arroja como resultado que es correcta, entonces éste puede ser transformado en una prueba formal de esta fórmula, en el caso de que 1.-3. devuelvan efectivamente a la matemática clásica por completo. El criterio expresado en 4. es así ciertamente necesario, y sólo debemos probar que resulta suficiente. Si en cambio el "cálculo efectivo" de una fórmula numérica da como resultado que no es correcta, entonces ello significa que a partir de aquella fórmula se puede "calcular" una relación $p = q$, donde p, q son dos números distintos, dados efectivamente. Igual que antes, esto arrojaría una prueba formal (de acuerdo con 3) para $p = q$. De allí reconocemos con facilidad que es posible obtener una prueba de $1 = 2$. Por lo tanto, para garantizar (4) sólo debemos mostrar que no es posible una demostración formal de $1 = 2$; esto es, es suficiente investigar una relación numérica incorrecta en particular.

La no demostrabilidad de la fórmula $1 = 2$ por medio de los métodos establecidos en 3. se denomina "consistencia". El verdadero problema es así la demostración finitaria-combinatoria de consistencia.

III.

Para poder indicar la estrategia para la demostración de consistencia, debemos explicar con más detalle el procedimiento de demostración formal (según 3.). Éste se define de la siguiente manera:

3_1. Ciertas fórmulas, caracterizadas de un modo inequívoco y finitario, se denominan axiomas. A cada uno de los axiomas se lo considera demostrado.

3_2. Si a, b son dos fórmulas con significado, y si tanto a como $a \rightarrow b$ están ya probadas, entonces b también está probada.

Debemos observar que, si bien 3_1., 3_2. autorizan la producción sucesiva de todas las fórmulas demostrables, el proceso no podrá ser nunca concluido, y éstos no proporcionan ningún procedimiento para decidir si una fórmula dada e es demostrable o no. Puesto que no podemos anticipar qué fórmulas deben ser demostradas sucesivamente, para finalmente demostrar e, entre aquellas podrían encontrarse fórmulas mucho más complicadas y construidas de un modo muy diferente a la propia fórmula e. (Por ejemplo, todo aquel que conoce la teoría de números analítica sabe cuán frecuentemente se presenta esta posibilidad; especialmente, a menudo uno debe admitir esta posibilidad incluso en los capítulos más bellos de la matemática.) El problema de decidir si una fórmula cualquiera dada es demostrable, por medio de un procedimiento general (y naturalmente, finitario), es mucho más profundo y difícil que el que aquí estamos tratando: se trata del llamado problema de decisión de la matemática.

Puesto que enunciar los axiomas que son utilizados en la matemática clásica nos alejaría mucho, para su caracterización bastará lo siguiente: existen infinitas fórmulas que deben ser consideras axiomas (así, por ejemplo, cada una de las fórmulas $1 = 1$, $2 = 2$, $3 = 3$, es según nuestra definición un axioma), pero ellas se obtienen de un número finito de esquemas, construidos de la siguiente manera: "Si a, b, c son fórmulas cualesquiera, entonces $(a \rightarrow b) \rightarrow ((b \rightarrow c) \rightarrow (a \rightarrow c))$ es un axioma", y cosas semejantes.

Ahora bien, si consiguiéramos especificar una clase de fórmulas R tal que:

α) Cada uno de los axiomas pertenece a R,

β) Con a y $a \rightarrow b$ igualmente b también pertenece a R.

γ) $1 = 2$ no pertenece a R,

entonces la consistencia sería así demostrada; en efecto, es evidente según α) y β) que toda fórmula demostrable pertenece a R, mientras que según γ) $1 = 2$ no es demostrable. Empero en la actualidad no es posible pensar en la especificación de tal clase R de fórmulas, puesto que esta tarea conlleva dificultades comparables con aquellas que enfrenta el problema de decisión.

Las observaciones siguientes nos conducen entretanto de este problema a otro significativamente más simple: si nuestro sistema fuese inconsistente, entonces existiría una prueba de 1=2, en la que sólo podrían haber sido utilizados un número finito de axiomas, al que designaremos el conjunto $\mathfrak{M}$. Pero entonces el sistema de axiomas $\mathfrak{M}$ es ya inconsistente. Por lo tanto, el sistema de axiomas de la matemática clásica es con certeza consistente, si cada uno de los subsistemas finitos también lo es. Y según lo anterior éste es el caso si para cada uno de los conjuntos finitos de axiomas $\mathfrak{M}$ podemos especificar una clase de fórmulas $R_{\mathfrak{M}}$, que posee las siguientes propiedades

α) Cada uno de los axiomas de $\mathfrak{M}$ pertenece a $R_{\mathfrak{M}}$.
β) Si a y $a \rightarrow b$ pertenecen a $R_{\mathfrak{M}}$, entonces b también pertenece a $R_{\mathfrak{M}}$.
γ) $1 = 2$ no pertenece a $R_{\mathfrak{M}}$.

No existe aquí ningún tipo de conexión con el problema (extremadamente complicado) de decisión, puesto que $R_{\mathfrak{M}}$ depende de $\mathfrak{M}$, y no dice sencillamente nada acerca de la demostrabilidad (con la ayuda de todos los axiomas). Resulta evidente que se debe exigir para $R_{\mathfrak{M}}$ una construcción finitaria y efectiva (para todo sistema finito de axiomas $\mathfrak{M}$ dado efectivamente), y que además la demostración desde α), β), γ) también debe ser finitaria.

El estado actual de situación indica que la consistencia de la matemática clásica todavía no ha sido demostrada, aunque esta prueba ha sido ya exitosa para un sistema matemático más reducido. Este sistema está estrechamente ligado a un sistema que Weyl había propuesto con anterioridad a la elaboración del sistema intuicionista; se trata de un sistema que va más allá del esquema intuicionista, pero que es más reducido que la matemática clásica (el lector encontrará referencias bibliográficas en el artículo de Weyl sobre la "Filosofía de la matemática" en el *Manual de filosofía*, Oldenbourg, Múnich).[1] De este modo, el sistema de Hilbert ha superado la primera prueba de fuerza: la justificación de un sistema matemático no finitario y no puramente constructivo es alcanzada a través de medios finitarios-constructivos. Si se conseguirá extender esta justificación para sistemas más complicados e importantes de la matemática clásica, sólo el futuro lo dirá.

Johann von Neumann

Traducción: Eduardo N. Giovannini[†‡]

[1] Weyl, H. (1927), *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft*, München: Oldenbourg Verlag [= *Handbuch der Philosophie*, hrsg. von A. Baeumler und M. Schröter, Teil A]. (Versión inglesa revisada y aumentada, basada en una traducción de Olaf Helmer: Weyl, H., *Philosophy of Mathematics and Natural Science*, Princeton: Princeton University Press, 1949. Versión castellana de Carlos Ímaz, a partir de la 4ª reimpresión inglesa de 1959: *Filosofía de las matemáticas y de la ciencia natural*, México: U.N.A.M., 1965.) [N. del T.]

[†] IHUCSO LITORAL, CONICET, Universidad Nacional del Litoral, Argentina. Para contactar al autor, por favor, escribir a: engiovannini@conicet.gov.ar.

[‡] Quisiera dejar constancia aquí de mi agradecimiento a Abel Lassalle Casanave y a Luiz Carlos Pereira por los comentarios y sugerencias realizados a esta traducción. [N. del T.]